

## مبادئ في المنطق

## العبارة

العبارة هي كل نص رياضي صحيح لغويا و معناه يمكن أن يكون صحيحا أو خاطئا و لا يمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في نفس الوقت

## الدالة العبارية

هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة و يصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة

## المكمات

## المكتم الكوني

لتكن  $x \in E; P(x)$   
العبارة  $P(x): (\forall x \in E)$  تقرأ مهما يكن  $x$  من  $E$  لدينا  $P(x)$  أو تقرأ لكل  $x$  من  $E$  لدينا  $P(x)$  و هي تعني أن جميع عناصر المجموعة  $E$  تحقق  $P(x)$   
الرمز  $\forall$  يسمى المكتم الكوني

## المكتم الوجودي

لتكن  $x \in E; P(x)$   
العبارة  $P(x): (\exists x \in E)$  تعني يوجد عنصر  $x$  على الأقل من  $E$  يحقق  $P(x)$   
الرمز  $\exists$  يسمى المكتم الوجودي  
العبارة  $P(x): (\exists! x \in E)$  تعني يوجد عنصر وحيد  $x$  من  $E$  يحقق  $P(x)$   
الرمز  $\exists!$  يسمى المكتم الوجودي بالوحدانية

إذا كانت المكمات من نفس الطبيعة فترتيبها غير مهم أما إذا كانت من طبيعتين مختلفتين فترتيبها مهم





**العمليات المنطقية**

**نفي عبارة**

نفي عبارة  $P$  هي عبارة نمرز لها ب  $\bar{P}$  أو  $\text{non}P$   
 $\bar{P}$  تكون صحيحة إذا كانت  $P$  خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت  $P$  صحيحة

$P$	$\bar{P}$
1	0
0	1

**نفي عبارات مكممة**

نفي العبارة:  $(\forall x \in E): P(x)$  هي العبارة:  $(\exists x \in E): \bar{P}(x)$    
 نفي العبارة:  $(\exists x \in E): P(x)$  هي العبارة:  $(\forall x \in E): \bar{P}(x)$    
 نفي العبارة:  $(\forall x \in E)(\forall y \in F): P(x, y)$  هي العبارة:  $(\exists x \in E)(\exists y \in F): \bar{P}(x, y)$    
 نفي العبارة:  $(\exists x \in E)(\exists y \in F): P(x, y)$  هي العبارة:  $(\forall x \in E)(\forall y \in F): \bar{P}(x, y)$  

**الإستدلال بالمثال المضاد:**

✓ للبرهنة على أن عبارة ما  $P$  خاطئة يكفي أن نبرهن أن نفيها  $\bar{P}$  صحيح  
 ✓ للبرهنة على أن العبارة  $(\forall x \in E): P(x)$  خاطئة يكفي إيجاد على الأقل عنصر  $x$  من  $E$  بحيث تكون  $\bar{P}(x)$  صحيحة

**الفصل المنطقي**

نمرز لفصل عبارتين  $P$  و  $Q$  بالرمز:  $(P \vee Q)$  أو  $(P \text{ أو } Q)$  و هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين  $P$  و  $Q$  صحيحة.

$P$	$Q$	$(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

العطف المنطقي

نرمز لعطف عبارتين  $P$  و  $Q$  بالرمز  $(P \wedge Q)$  أو  $(P \text{ و } Q)$  و هو عبارة تكون صحيحة فقط في حالة إذا كانت العبارتين  $P$  و  $Q$  صحيحتين معا .

$P$	$Q$	$(P \wedge Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الإستلزام

نرمز لإستلزام عبارتين  $P$  و  $Q$  بالرمز  $P \Rightarrow Q$  و نقرأ  $P$  تستلزم  $Q$  أو إذا كان  $P$  فإن  $Q$  و هو يكون خاطئا في حالة واحدة هي أن تكون  $P$  صحيحة و  $Q$  خاطئة

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

التكافؤ المنطقي

نرمز لتكافؤ عبارتين  $P$  و  $Q$  بالرمز  $P \Leftrightarrow Q$  و نقرأ  $(P \text{ تكافئ } Q)$  أو  $(P \text{ تعني } Q)$  أو  $(P \text{ إذا وفقط إذا كان } Q)$  و هو يعني  $(P \Rightarrow Q \text{ و } Q \Rightarrow P)$  ويكون التكافؤ صحيحا إذا كانت ل  $P$  و  $Q$  نفس قيم الحقيقية

$P$	$Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

### القوانين المنطقية

#### قوانين مورغان

لتكن  $P$  و  $Q$  عبارتين ، لدينا :

$$\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q} \qquad \overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

لتكن  $P$  و  $Q$  و  $R$  ثلاث عبارات ، لدينا :

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

#### قانون التكافؤ المتتالية

العبرة  $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$  قانون منطقي

#### قانون الإستلزام المضاد للعكس

العبرة  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$  قانون منطقي

#### قانون الخلف

العبرة  $[(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}) \wedge (\overline{P} \Rightarrow Q)] \Rightarrow P$  قانون منطقي

#### قانون فصل الحالات

العبرة  $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [(P \vee Q) \Rightarrow R]$  قانون منطقي

### مبدأ التراجع

لتكن  $P(n)$  خاصية لمتغير صحيح طبيعي  $n$

- ❖ إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي  $n_0$  بحيث تكون  $P(n_0)$  صحيحة
- ❖ إذا كانت العبرة  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  صحيحة  $(\forall n \geq n_0)$

فإن العبرة  $P(n)$  صحيحة  $(\forall n \geq n_0)$